

CORRIGÉ 1 Dans le plan complexe ( $\mathcal{P}$ ) muni d'un repère orthonormal direct ( $O; \vec{u}, \vec{v}$ ) d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe  $a = -1$  et l'application  $f$ , du plan ( $\mathcal{P}$ ) dans lui-même, qui au point  $M$  d'affixe  $z$ , distinct de A, associe le point  $M' = f(M)$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = \frac{iz}{z+1}.$$

① Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ :

$$z' = z \iff z = \frac{iz}{z+1} \iff z(z+1) = iz \iff z^2 + z(1-i) \iff z(z - (-1+i)) \iff z = 0 \text{ ou } z = -1+i$$

Les points d'affixes 0 et  $-1+i$  sont invariants par l'application  $f$ .

② Pour tout point  $M$  distinct de A, on a:

$$OM' = \left| \frac{iz}{z+1} \right| = \frac{|iz|}{|z+1|} = \frac{|i| \cdot |z|}{|z+1|} = \frac{OM}{AM}$$

Pour tout point  $M$  distinct de A et de O, on a:

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) &\equiv \text{Arg} \left( \frac{iz}{z+1} \right) \equiv \text{Arg}(i) + \text{Arg} \left( \frac{z}{z+1} \right) \quad [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} + \text{Arg} \left( \frac{-z}{-1-z} \right) \quad [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) \quad [2\pi] \end{aligned}$$

③ a) Soit  $B$  le point d'affixe  $b = -\frac{1}{2} + i$ . (Voir figure)

b) Calcul de l'affixe  $b'$  du point  $B'$  image du point  $B$  par  $f$ :

$$b' = \frac{ib}{b+1} = \frac{i \left( -\frac{1}{2} + i \right)}{-\frac{1}{2} + i + 1} = \frac{-1 - \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} + i} = \frac{-2 - i}{1 + 2i} = \frac{(-2-i)(1-2i)}{1^2 + 2^2} = \frac{-4}{5} + \frac{3}{5}i$$

$B'$  appartient au cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre  $O$  et de rayon 1, car:

$$OB' = |b'| \left| \frac{-4}{5} + \frac{3}{5}i \right| = \sqrt{\left( \frac{-4}{5} \right)^2 + \left( \frac{3}{5} \right)^2} = \sqrt{\frac{16+9}{25}} = 1$$

c) Soit ( $\Delta$ ) la médiatrice de  $[OA]$ .

$$M \in (\Delta) \iff OM = AM \iff 1 = \frac{OM}{AM} \iff OM' = 1 \iff M' \in \mathcal{C}.$$

où  $\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

d) D'après la question ②, on a :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OC'}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) \quad [2\pi].$$

$$\text{Or le triangle } AOC \text{ est un triangle équilatéral direct donc } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\text{Donc } (\vec{u}, \overrightarrow{OC'}) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$$

④ Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points  $M$  distincts de A et de O dont l'image  $M'$  par  $f$  appartient à l'axe des abscisses.

a) On pose  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels tels que  $(x, y) \neq (-1, 0)$  et  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

$$z' = \frac{i(x + iy)}{x + iy + 1} = \frac{-y + ix}{(x + 1) + iy} = \frac{(-y + ix)(x + 1 - iy)}{(x + 1)^2 + y^2} = \frac{-y + i(x^2 + y^2 + x)}{(x + 1)^2 + y^2}; \text{ d'où } \operatorname{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x + 1)^2 + y^2}$$

$M'$  appartient à l'axe des abscisses si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, donc si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 0 \\ (x; y) \neq (-1; 0) \end{cases} \iff \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ (x; y) \neq (-1; 0) \end{cases}$$

Ainsi  $(\Gamma)$  est le cercle de centre  $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ , privé du point  $A(-1; 0)$ .

b) Méthode géométrique:

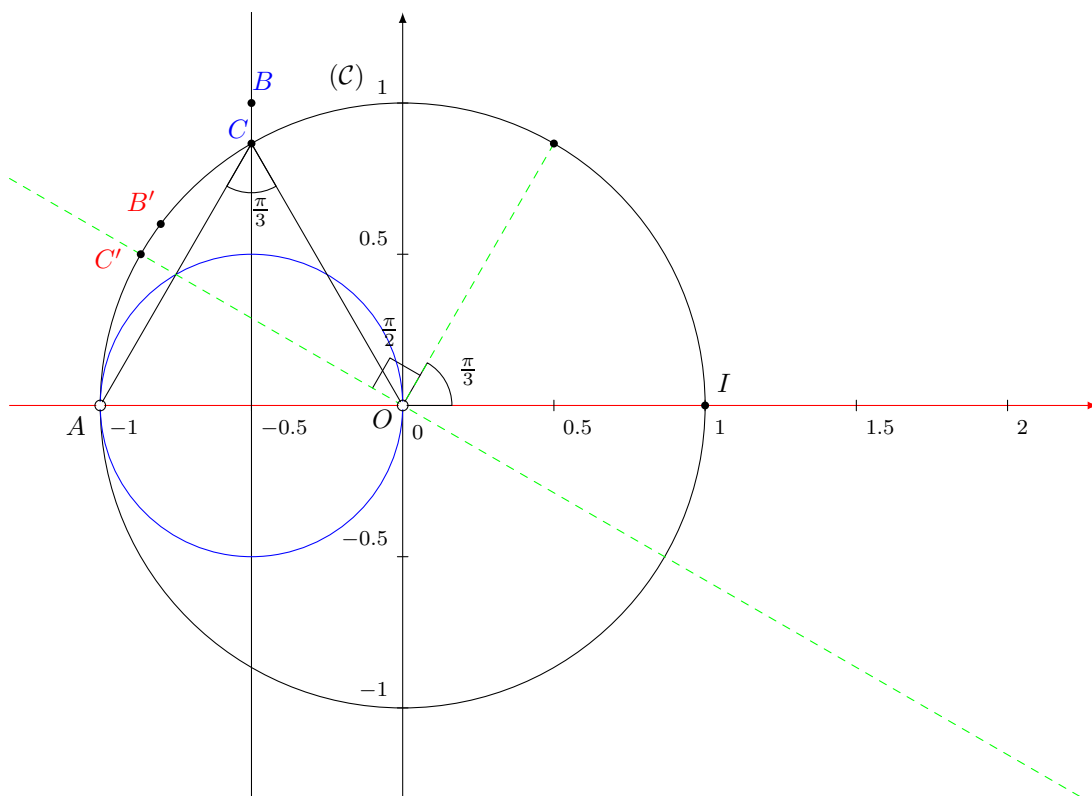
Soit  $M$  distinct de  $O$  et de  $A$ .  $M'$  est donc distinct de  $O$ .

$M'$  est sur l'axe des abscisses si, et seulement si:

il existe un entier  $k$  tel que  $(\vec{u}, \vec{OM'}) \equiv k\pi \pmod{2\pi}$  ou encore, d'après la question ②, si, et seulement si:

il existe un entier  $k$  tel que  $(\vec{MA}, \vec{MO}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \pmod{2\pi}$ , c'est-à-dire si, et seulement si :

$M$  appartient au cercle de diamètre  $[AO]$  privé des points  $O$  et  $A$ .



CORRIGÉ 2①a)  $a' = i + i - \frac{1}{i} = 2i + i = 3i$ ;

$$b' = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}}i - e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 2i.$$

b) Cf. la figure plus bas.

$$c) \frac{-b}{b' - b} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{6}}}{2i - e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{2i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)i}{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}}$$

$$\frac{-b}{b' - b} = \frac{\sqrt{3}}{3}i.$$

$$d) \arg\left(\frac{-b}{b' - b}\right) \equiv (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BO}) \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

Donc le triangle OBB' est rectangle en B.

$$\textcircled{2} a) z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{1}{2}i\right)^2 + \frac{1}{4} - 1 = \left(z + \frac{1}{2}i\right)^2 - \frac{3}{4} = \left(z + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

b) Soit  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $M$  d'affixe  $z$ .

$F(M) = O \iff z + i + \frac{1}{z} = 0 \iff \frac{z^2 + iz + 1}{z} = 0 \iff z^2 + iz + 1 = 0$  (car  $M \neq O$ ), soit d'après la question précédente :

$$z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 0 \quad \text{ou} \quad z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 0$$

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{ou} \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$c) \text{ Pour les deux points trouvés leurs coordonnées vérifient : } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 = 1^2.$$

Leur module est égal à 1 : les deux points de (E) appartiennent bien au cercle unitaire ( $\Gamma$ ).

$$\textcircled{3} a) \text{ Si } z = e^{i\theta} \text{ alors } z' = e^{i\theta} + i - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + i - \cos\theta + i\sin\theta = 2i\sin\theta + i = (2\sin\theta + 1)i.$$

b) Si  $M$  a pour affixe  $z = e^{i\theta}$ , cela signifie qu'il appartient au cercle ( $\Gamma$ ) ; on vient de trouver que l'affixe de son image est égale à  $(2\sin\theta + 1)i$  qui est un imaginaire pur. Donc  $M'$  appartient à l'axe des ordonnées.

Plus précisément, comme  $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ , on a  $-1 \leq 2\sin\theta + 1 \leq 3$ , c'est-à-dire que l'image  $M'$  d'un point du cercle est situé sur le segment  $[A'C]$ . On a ainsi montré  $f(\Gamma) \subset [A'C]$

Réciproquement, comme  $\sin\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] = [-1; 1]$ , pour tout point  $M'(z')$  situé sur le segment  $[A'C]$ , il existe un  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  tel que  $z' = (2\sin\theta + 1)i$ , c'est-à-dire tel que  $z' = f(z)$  où  $z = e^{i\theta}$  est bien l'affixe d'un point  $M$  sur  $\Gamma$

